$$\Longrightarrow \boxed{z' = \frac{\sin\frac{3\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} e^{i\theta}}$$

$$z'' = \frac{2+e^{2i\theta}-2e^{i\theta}-e^{2i\theta}}{2} = 1-e^{i\theta} = z_1$$

$$\Longrightarrow \boxed{z'' = 2\sin\frac{\theta}{2} e^{i(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{2})}}$$

## Exercice n° 21 $\alpha \in ]0;\pi[$

$P(z) = z^3 - (1-2\sin\alpha)z^2 + (1-2\sin\alpha)z - 1$

● a) $P(1) = 1 - (1-2\sin\alpha) + 1 - 2\sin\alpha - 1$
$= 1 - 1 + 2\sin\alpha + 1 - 2\sin\alpha - 1 = 0$

b) On a P (1) = 0 donc

w = 1 est une racine de P (z) = 0

D'où $P(z) = (z-1)(a.z^2 + b.z + c)$
$= a.z^3 + (b-a)z^2 + (c-b)z - c$

Par identification membre à membre on obtient :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = -1 + 2\sin\alpha \Rightarrow b = 2\sin\alpha \\ c - b = 1 - 2\sin\alpha \\ -c = -1 \Rightarrow c = 1 \end{cases}$$

Donc $P(z)=0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2 + 2\sin\alpha.z + 1) = 0$

$\Leftrightarrow$ z − 1 = 0 ou $z^2 + 2\sin\alpha.z + 1 = 0$

On va résoudre $z^2 + 2\sin\alpha.z + 1 = 0$ en effet :

$\Delta' = \sin^2\alpha - 1 = -\cos^2\alpha = (i\cos\alpha)^2$ Donc $\delta' = i\cos\alpha$

Par suite $z' = -\sin\alpha + i\cos\alpha$
$z'' = -\sin\alpha - i\cos\alpha = \overline{z'}$

Donc : P (z) = 0 $\Leftrightarrow$ z = 1 = w, z = z' et z = z''

$S_{\mathbb{C}} = \{1, -\sin\alpha + i\cos\alpha, -\sin\alpha - i\cos\alpha\}$

- $w = 1 = e^{i0}$

$z' = -\sin\alpha + i\cos\alpha = i(\cos\alpha + i\sin\alpha)$
$= e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\alpha} = e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha)}$

$z'' = \overline{z'} = e^{-i(\frac{\pi}{2}+\alpha)}$

● $u^3 = e^{i(\alpha+\frac{\pi}{2})} \Leftrightarrow u_k = e^{i(\frac{\alpha}{3}+\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3})}, k \in \{0,1,2\}$

$\Leftrightarrow u_0 = e^{i(\frac{\alpha}{3}+\frac{\pi}{6})}$, $u_1 = e^{i(\frac{\alpha}{3}+\frac{5\pi}{6})}$ et $u_2 = e^{i(\frac{\alpha}{3}-\frac{\pi}{2})}$

● $1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}) = 2\cos\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$

● Posons Z = (z − 1)³ donc l'équation :
$(z-1)^6 + 2\sin\alpha(z-1)^3 + 1 = 0$ est équivalente à

$$\begin{cases} Z^2 + 2\sin\alpha.Z + 1 = 0 \\ Z = (z-1)^3 \end{cases}$$

Or les solutions de l'équation $Z^2 + 2\sin\alpha.Z + 1 = 0$ sont d'après 1) b) Z' = $e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha)}$, Z'' = $e^{-i(\frac{\pi}{2}+\alpha)}$

par suite on aura :

$(z-1)^3 = e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha)}$ ou $(z-1)^3 = e^{-i(\frac{\pi}{2}+\alpha)} = e^{i(-\frac{\pi}{2}-\alpha)}$

D'après 2) on trouve :

$* z_0 - 1 = u_0 = e^{i(\frac{\alpha}{3}+\frac{\pi}{6})} \Rightarrow z_0 = 1 + e^{i(\frac{\alpha}{3}+\frac{\pi}{6})}$

$$\Longrightarrow \boxed{z_0 = 2\cos(\frac{\alpha}{6}+\frac{\pi}{12}) e^{i(\frac{\alpha}{6}+\frac{\pi}{12})}}$$

$* z_1 - 1 = u_1 = e^{i(\frac{\alpha}{3}+\frac{5\pi}{6})} \Rightarrow z_1 = 1 + e^{i(\frac{\alpha}{3}+\frac{5\pi}{6})}$

$$\Longrightarrow \boxed{z_1 = 2\cos(\frac{\alpha}{6}+\frac{5\pi}{12}) e^{i(\frac{\alpha}{6}+\frac{5\pi}{12})}}$$

$* z_2 - 1 = u_2 = e^{i(\frac{\alpha}{3}-\frac{\pi}{2})} \Rightarrow z_2 = 1 + e^{i(\frac{\alpha}{3}-\frac{\pi}{2})}$

$$\Longrightarrow \boxed{z_2 = 2\cos(\frac{\alpha}{6}-\frac{\pi}{4}) e^{i(\frac{\alpha}{6}-\frac{\pi}{4})}}$$

On a : $u^3 = e^{i(\alpha+\frac{\pi}{2})} \Leftrightarrow \overline{(u^3)} = \overline{u}^{-3} = \overline{e^{i(\alpha+\frac{\pi}{2})}} = e^{-i(\alpha+\frac{\pi}{2})}$

Donc si $u_k$ est une racine cubique de $e^{i(\frac{\pi}{2}+\alpha)}$ alors $\overline{u_k}$ est une racine cubique de $e^{-i(\frac{\pi}{2}+\alpha)}$

D'où l'équation $(z-1)^3 = e^{-i(\frac{\pi}{2}+\alpha)}$ donne $z_3 = \overline{z_0}$, $z_4 = \overline{z_1}$ et $z_5 = \overline{z_2}$

**Conclusion** :

$$S_{\mathbb{C}} = \{z_0, z_1, z_2, \overline{z_0}, \overline{z_1}, \overline{z_2}\}$$

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn